ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σχολικό σελίδα 15

β)

i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

ii. Μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Από τον τρόπο αυτό ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f
- Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

Α2. Σχολικό σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α4.

α) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $f(0) = 0$

Α5. Σωστή απάντηση είναι το (γ) 4

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=e^{-x}+\lambda,\ \ A_f:\mathbb{R}$

B1.

Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

B2. Θεωρώ $g(x)=f(x)-x$ η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[2,3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

$$\left.\begin{aligned} g(2)&=f(2)-2=e^{-2}+2-2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}>0\\ g(3)&=f(3)-3=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\frac{1}{e^3}-1<0\end{aligned}\right\} g(2)\cdot g(3)<0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-x_0=0$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}<0$, οπότε η fείναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, οπότε $f(A)=(2,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται $y=f(x)\Rightarrow y=e^{-x}+2\Rightarrow \ln(y-2)=-x\Rightarrow x=-\ln(y-2)$.

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $A_{f^{-1}}=f(A)=(2,+\infty)$

B4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\infty$ άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$f(x)=e^{-x}+2,\ A_f:\mathbb{R}$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x)=e^{-x}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f''(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 2

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $A_{f^{-1}} : (2,+\infty)$

Η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$

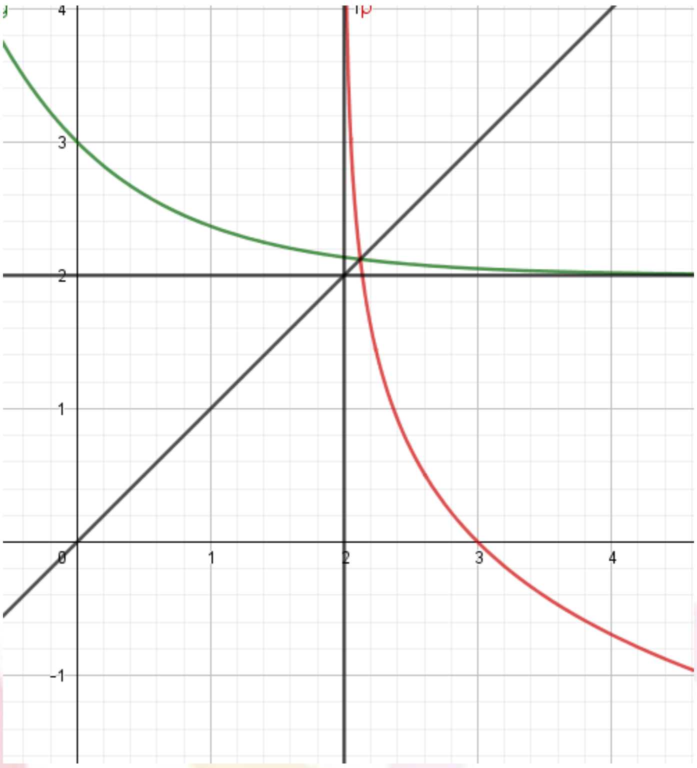
Η $\left(f^{-1}\right)'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$, με $\left(f^{-1}\right)''(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$ άρα η f^{-1} είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} \underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{dlh}{=}} \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-2} = 0 = \lambda$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f^{-1}(x) - \lambda x\right) = -\infty$, άρα δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$

x	$-\infty$		2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(f^{-1}\right)'(x)$			$-$
$\left(f^{-1}\right)''(x)$			$+$
$f^{-1}(x)$			$+\infty$ ↘ $-\infty$

Θα πρέπει να σχεδιάσουμε και την $y = x$ η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.



Η μελέτη της αντίστροφης θα μπορούσε να μην γίνει και να φτιάξω μια πρόχειρη γραφική παράσταση με την βοήθεια της συμμετρίας ως προς την y = x

*Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν με την μετατόπιση των γραφικών παραστάσεων από την διδαχθείσα ύλη της Β’ Λυκείου.

Επιμέλεια απαντήσεων: Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Βαλιάδη Μαρία